JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY 23, 261–266 (1978)

Approximationseigenschaften differenzierter Interpolationspolynome

RICHARD HAVERKAMP

Institut für Numerische und Instrumentelle Mathematik der Universität Münster, 4400 Münster, West Germany

Communicated by Lothar Collatz

Received December 14, 1976

Ist $\tilde{L}_n u$ aus π_n das Polynom, das die Funktion $u \in C[-1, 1]$ in den Nullstellen des Čebyšev-Polynoms $T_{n+1}(t)$ interpoliert, dann genügt der Interpolationsfehler der Abschätzung

$$\| u - \tilde{L}_n u \| \leqslant 2 \left[1 + \frac{1}{\pi} \ln(n+1)\right] E_n(u).$$

In dieser Ungleichung ist $\| \cdot \|$ die Maximumsnorm und

$$E_n(u) := \min\{\| u - p \| : p \in \pi_n\}$$

der Fehler der besten Approximierenden aus π_n.

Zum Beweis vgl. Rivlin [4, S. 11–18].

Zusammen mit den Jackson-Sätzen sichert diese Abschätzung gleichmäßige Konvergenz der Folge $\{\tilde{L}_n u\}$ gegen u, wenn mit dem Stetigkeitsmodul von u gilt: $\lim_{n\to\infty} w(1/n, u) \ln n = 0$. Die Voraussetzung $u \in C[-1, 1]$ allein reicht nach dem Satz von Faber bekanntlich nicht aus.

Ähnlich gut wird u approximiert durch die Polynome $L_n u$ aus π_n, die in den Extremstellen von $T_n(t)$ interpolieren.

In dieser Arbeit wird gezeigt, daß im Fall $u \in C^1[-1, 1]$ die Ableitungen $L_n' u := (L_n u)'$ entsprechend gute Näherungen von u' sind. Als Abschwächung des folgenden Satzes erhält man mit dem Stetigkeitsmodul $w(\cdot, u')$ das entsprechende Kriterium für die gleichmäßige Konvergenz der Folge $\{L_n' u\}$ gegen u'.

Eine ähnliche Konvergenzaussage findet man bei Neckermann und Runck [2], jedoch unter der stärkeren Annahme $u \in C^2[-1, 1]$. Im genannten Artikel wird auch der Fall höherer Ableitungen behandelt.

Inhalt dieser Arbeit ist der folgende

0021-9045/78/0233–0261$02.00/0

SATZ. *Ist* $n \geqslant 1$, $u \in C^1[-1, 1]$ *und* $L_n u \in \pi_n$ *das Polynom, das* u *in den Punkten*

$$t_j = \cos(j/n)\pi, \qquad 0 \leqslant j \leqslant n \tag{1}$$

interpoliert, dann genügt $L_n' u$ *der Abschätzung*

$$\| u' - L_n' u \| \leqslant 4(3 + \ln n)\, E_{n-1}(u'). \tag{2}$$

Bemerkung. Mit entsprechenden Überlegungen, aber etwas gröberen Abschätzungen, weist Pallaschke [3] im Fall $u \in C^2[-1, 1]$ Konvergenz der Folge $\{(L_{2n-1}u)'(0)\}$ gegen $u'(0)$ nach.

Beweis. Es genügt,

$$|(L_n' u)(t)| \leqslant (11 + 4 \ln n)\, \| u' \| \qquad \text{für} \quad u \in C^1[-1, 1],$$
$$t \in [-1, 1] \backslash \{t_j : 0 \leqslant j \leqslant n\}, \tag{3}$$

zu zeigen, denn dann folgt aus Stetigkeitsgründen

$$\| L_n' u \| \leqslant (11 + 4 \ln n)\, \| u' \| \qquad \text{für} \quad u \in C^1[-1, 1],$$

und wegen $p' - L_n' p = 0$ für $p \in \pi_n$ durch Anwendung der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} \| u' - L_n' u \| &\leqslant \| u' - p' \| + \| L_n'(u - p) \| \\ &\leqslant 4(3 + \ln n)\, \| u' - p' \|, \qquad p \in \pi_n, \quad u \in C^1[-1, 1]. \end{aligned}$$

Zusammen mit

$$E_{n-1}(u') = \min\{\| u' - p' \| : p \in \pi_n\}$$

ergibt dies die Aussage des Satzes.

Es bleibt also, (3) zu zeigen.

Das Čebyšev-Polynom

$$T_n(t) = \cos n(\arccos t), \qquad t \in [-1, 1],$$

genügt der Differentialgleichung

$$(1 - t^2)\, T_n''(t) - t T_n'(t) + n^2 T_n(t) = 0 \tag{4}$$

(vgl. Courant und Hilbert [1, Seite 439]) und nimmt in den Interpolationspunkten t_j den Wert $\| T_n \| = 1$ mit wechselndem Vorzeichen an.

Bei der gewählten Anordnung gilt $-1 = t_n < \cdots < t_0 = 1$ und

$$T_n(t_j) = (-1)^j, \qquad 0 \leqslant j \leqslant n, \qquad T_n'(t_0) = (-1)^{n-1}\, T_n'(t_n) = n^2. \tag{5}$$

Mit dem Polynom

$$w_n(t) = (1 - t^2)\, T_n'(t), \tag{6}$$

das als Nullstellen die Interpolationspunkte hat, sei

$$c_j = \frac{-1}{w_n'(t_j)}, \qquad l_j(t) = c_j \frac{w_n(t)}{t_j - t}, \qquad 0 \leqslant j \leqslant n. \tag{7}$$

Dann hat das Interpolationspolynom die Darstellung

$$(L_n u)(t) = \sum_{j=0}^{n} u(t_j)\, l_j(t)$$

und man erhält mit $\sum_j l_j' = 0$ für die Ableitung

$$(L_n' u)(t) = \sum_{j=0}^{n} \{u(t_j) - u(t)\}\, l_j'(t). \tag{8}$$

Nach Einsetzen von

$$l_j'(t) = c_j \left\{ \frac{w_n'(t)}{t_j - t} + \frac{w_n(t)}{(t_j - t)^2} \right\}, \qquad 0 \leqslant j \leqslant n,$$

geht (8) nach Einführen der Funktionen

$$u_t(s) = \frac{u(s) - u(t)}{s - t}, \qquad u_{tt}(s) = \frac{u(s) - u(t)}{(s - t)^2} \tag{9}$$

über in

$$(L_n' u)(t) = w_n'(t) \sum_{j=0}^{n} c_j u_t(t_j) + w_n(t) \sum_{j=0}^{n} c_j u_{tt}(t_j). \tag{10}$$

Da $t_1, \ldots, t_{n-1}$ lokale Extrema von T_n sind, erhält man nach (4) und (5)

$$w_n'(t) = -n^2 \left\{ T_n(t) + \frac{t}{n^2} T_n'(t) \right\}, \tag{11}$$

$$c_0 = (-1)^n c_n = \frac{1}{2n^2}, \qquad c_j = \frac{(-1)^j}{n^2} \quad \text{für} \quad 1 \leqslant j \leqslant n - 1 \tag{12}$$

und mit (10) nach leichter Umformung

$$\begin{aligned} 2n^{2\prime} L_n' u)(t) = {} & w_n'(t) \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \{u_t(t_j) - u_t(t_{j-1})\} \\ & + w_n(t) \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \{u_{tt}(t_j) - u_{tt}(t_{j-1})\}. \end{aligned} \tag{13}$$

Zum Beweis von (3) werden die folgenden vier Abschätzungen gezeigt

$$| w_n'(t)| \leqslant 2n^2, \qquad t \in [-1, 1] \tag{14}$$

$$| w_n(t)| \leqslant 2n^2 \min_{0 \leqslant j \leqslant n} | t - t_j | \tag{15}$$

$$\sum_{j=1}^{n} | u_t(t_j) - u_t(t_{j-1})| \leqslant (3 + 4 \ln n) \| u' \| \tag{16}$$

$$\sum_{j=1}^{n} | u_{tt}(t_j) - u_{tt}(t_{j-1})| \leqslant 8 \| u' \| \max_{0 \leqslant j \leqslant n} \frac{1}{| t - t_j |} . \tag{17}$$

Ungleichung (14) gilt wegen (11) und $\| T_n \| = 1$, $\| T_n' \| = n^2$. Zur Norm von T_n' vgl. Rivlin [4, Seite 7 (1.24)].

Da $t_0, \ldots, t_n$ Nullstellen von w_n sind, folgt (15) unmittelbar aus (14).

Für die Funktionen u_t, u_{tt} aus (9) erhält man

$$u_t'(s) = \frac{u'(s)}{s - t} - \frac{u_t(s)}{s - t}, \qquad u_{tt}'(s) = \frac{u'(s)}{(s - t)^2} - 2 \frac{u_{tt}(s)}{s - t}$$

und nach dem Mittelwertsatz

$$| u_t(s)| \leqslant \| u' \|, \qquad | u_{tt}(s)| \leqslant \frac{\| u' \|}{| s - t |} \tag{18}$$

$$| u_t'(s)| \leqslant 2 \frac{\| u' \|}{| s - t |}, \qquad | u_{tt}'(s)| \leqslant 3 \frac{\| u' \|}{(s - t)^2} . \tag{19}$$

Ist $t \in (t_k, t_{k-1})$, so erhält man mit (18)

$$| u_{tt}(t_k) - u_{tt}(t_{k-1})| \leqslant 2 \| u' \| \max_{0 \leqslant j \leqslant n} \frac{1}{| t - t_j |}$$

und mit (19) für den Rest der Summe

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} | u_{tt}(t_j) - u_{tt}(t_{j-1})| \leqslant 3 \| u' \| \left\{ \int_{t_{k-1}}^{1} \frac{ds}{(s - t)^2} + \int_{-1}^{t_k} \frac{ds}{(s - t)^2} \right\}$$
$$\leqslant 6 \| u' \| \max_{0 \leqslant j \leqslant n} \frac{1}{| t - t_j |} .$$

Damit ist auch (17) gezeigt.

Grobe Abschätzung ergibt die Ungleichungen

$$2n \leqslant 3 + 4 \ln n \qquad \text{für} \quad 1 \leqslant n \leqslant 4, \tag{20}$$

$$2 \ln \frac{\pi^2}{2} \geqslant 2 \ln \frac{3\pi}{2} \geqslant 3, \tag{21}$$

die hier beim Beweis zu (16) benutzt werden.

Nach (18) und (20) gilt

$$\sum_{j=1}^{n} | u_t(t_j) - u_t(t_{j-1})| \leqslant 2n \| u' \| \leqslant (3 + 4 \ln n) \| u' \|, \qquad \text{wenn} \quad 1 \leqslant n \leqslant 4.$$

Ist $n \geqslant 5$ und $t \in (t_1, t_0)$, dann folgt, indem man die ersten zwei Summanden nach (18), die übrigen mit Hilfe von (19) abschätzt,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} | u_t(t_j) - u_t(t_{j-1})| &\leqslant \left(4 + 2 \ln \frac{1+t}{t - t_2}\right) \| u' \| \\ &\leqslant \left(4 + 2 \ln \frac{2}{t_1 - t_2}\right) \| u' \|. \end{aligned} \tag{22}$$

Für die Differenz

$$t_1 - t_2 = \cos \pi/n - \cos 2\pi/n$$

erhält man wegen $n \geqslant 5$ und

$$\sin t \geqslant (2/\pi)\, t, \qquad t \in [0, \pi/2]$$

die untere Schranke

$$t_1 - t_2 \geqslant \int_{\pi/n}^{2\pi/n} \sin t \, dt \geqslant \frac{3\pi}{n^2}.$$

Diese Ungleichung zusammen mit (21) und (22) ergibt die Abschätzung (16) im hier behandelten Fall $n \geqslant 5$, $t \in (t_1, t_0)$. Ebenso verifiziert man (16) im Fall $n \geqslant 5$, $t \in (t_n, t_{n-1})$. Sei nun $n \geqslant 5$ und $t \in (t_k, t_{k-1})$ für ein $k \in \{2,..., n-1\}$.

Analog zu Abschätzung (22) erhält man

$$\sum_{j=1}^{n} | u_t(t_j) - u_t(t_{j-1})| \leqslant \left\{6 + 2 \ln \frac{1 - t^2}{(t_{k-2} - t)(t - t_{k+1})}\right\} \| u' \|.$$

Die drei Summanden

$$| u_t(t_j) - u_t(t_{j-1})|, \qquad k - 1 \leqslant j \leqslant k + 1$$

wurden nach (18), die übrigen unter Benutzung von (19) abgeschätzt.

Zeigt man noch

$$\frac{(t_{k-2} - t)(t - t_{k+1})}{1 - t^2} \geqslant \frac{\pi^2}{2n^2} \qquad \text{für} \quad t \in (t_k, t_{k-1}), \tag{23}$$

so ist wegen (21) die Abschätzung (16) in allen Fällen bewiesen.

Mit den Werten

$$\alpha := \frac{k-2}{n}\,\pi, \quad \gamma := \frac{k+1}{n}\,\pi, \quad \text{und} \quad \text{einem } \beta \in \left(\frac{k-1}{n}\,\pi, \frac{k}{n}\,\pi\right) \tag{24}$$

gilt

$$t_{k-2} = \cos\alpha, \qquad t_{k+1} = \cos\gamma, \qquad t = \cos\beta, \qquad 1 - t^2 = \sin^2\beta. \tag{25}$$

Da $\sin t$ in $[0, \pi]$ konkav ist, und keine negativen Werte annimmt, folgt

$$t - t_{k+1} = \cos\beta - \cos\gamma > \frac{\gamma-\beta}{2}\{\sin\beta + \sin\gamma\} \geqslant \frac{\gamma-\beta}{2}\sin\beta$$

und analog

$$t_{k-2} - t \geqslant \frac{\beta-\alpha}{2}\sin\beta.$$

Zusammen mit (24), (25) und

$$(\gamma-\beta)(\beta-\alpha) \geqslant 2\,\frac{\pi^2}{n^2} \qquad \text{für} \quad \beta \in \left(\frac{k-1}{n}\,\pi, \frac{k}{n}\,\pi\right),$$

erhält man schließlich die noch ausstehende Ungleichung (23).

Gleichung (13) und die Abschätzungen (14)–(17) ergeben nun (3) und nach obiger Vorüberlegung die Aussage des Satzes.

LITERATURVERZEICHNIS

1. R. COURANT UND D. HILBERT, "Methoden der Mathematischen Physik, I," 3. Aufl., Heidelberger Taschenbücher, Springer-Verlag, Berlin 1968.
2. L. NECKERMANN UND P. O. RUNCK, Über Approximationseigenschaften differenzierter Lagrange'scher Interpolationspolynome mit Jacobi'schen Abszissen, *Numer. Math.* **12** (1968), 159–169.
3. D. PALLASCHKE, Konvergenz optimaler Differentiationsformeln. *Numer. Math.* **27** (1977), 421–426.
4. TH. J. RIVLIN, "The Chebyshev Polynomials," Wiley, New York/London/Sydney/Toronto, 1974.